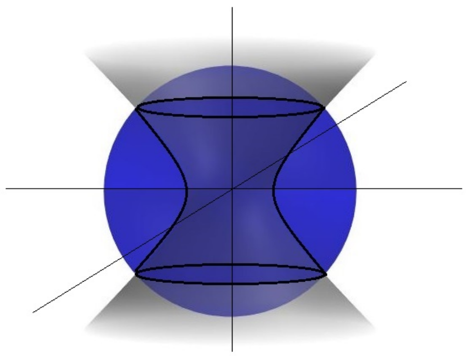
Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Firme y entregue el enunciado junto a la hoja de examen. **Tiempo máximo** 1 **hora y** 20 **minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. Considere la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, ilustrados en la figura.



   i. Demuestre que
   $$\Phi(t, \theta) = (t \cos \theta, t \operatorname{sen} \theta, \pm\sqrt{t^2 - 1}),$$
   con $t \in \mathbb{R}$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, define una parametrización del hiperboloide.

   ii. Calcule el área de la porción de la esfera que queda fuera del hiperboloide.

   iii. Calcule el volumen de la porción del hiperboloide comprendida entre los puntos de corte con la esfera (es decir con tapas planas, como indica la figura).

   (8 puntos)

2. Calcule las siguientes integrales:

   i. $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\, dxdy.$

   ii. $\displaystyle\iint_R \left(\frac{x - y}{x + y + 2}\right)^2 dxdy$, donde R es el rombo en el plano con vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$.

   (6 puntos)

3. Considere la curva $\mathbf{c}$ en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por
   $$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t - \cos t)\,,$$
   para $t \in [0, 2\pi]$, y la porción S de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ para $z \geq 1$.

   i. Calcule $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} f\, ds$ para $f(x, y, z) = z^2\sqrt{1 - xy}$.

   ii. Calcule $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s}$ para $f(x, y, z) = z^2\sqrt{1 - xy}$.

   iii. Calcule $\displaystyle\iint_{\mathsf{S}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}}\, dS$ para $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (xz, yz, z^2)$.

   iv. Calcule $\displaystyle\iint_{\mathsf{S}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S}$ para $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (xz, yz, z^2)$.

   (8 puntos)

Solución

1.

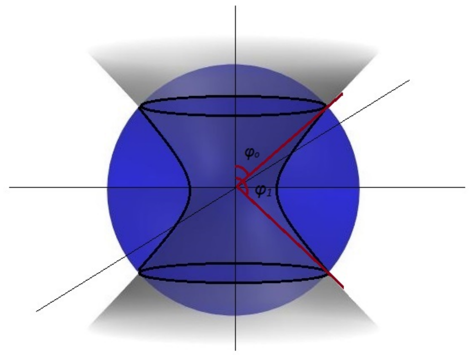
i. La figura ilustra la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el hiperboloide de una hoja $x^2+y^2-z^2 = 1$. La primera puede parametrizarse en coordenadas esféricas como

$$\Phi_S(\theta, \phi) = (3\cos\theta \sin\phi, 3\sin\theta\sin\phi, 3\cos\phi),$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, y para demostrar que

$$\Phi(t, \theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \pm\sqrt{t^2-1}),$$

con $t \in \mathbb{R}$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, define una parametrización del hiperboloide, solamente debemos verificar que



$$x(t,\theta) = t\cos\theta, \quad y(t,\theta) = t\sin\theta \quad \text{y} \quad z(t,\theta) = \pm\sqrt{t^2-1},$$

satisfacen la ecuación que define la superficie:

$$x^2 + y^2 - z^2 = t^2\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta - (t^2-1) = t^2 - t^2 + 1 = 1,$$

y que con los valores definidos para los parámetros ($t \in \mathbb{R}$ y $\theta \in [0, 2\pi]$) todos los puntos de la superficie son cubiertos por tal parametrización, lo cual es cierto para el hiperboloide dado.

ii. El área de la porción de la esfera que queda fuera del hiperboloide se puede calcular usando la parametrización de la esfera en coordenadas esféricas dada anteriormente:

$$\mathrm{A}(S) = \iint_D \|\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi\| d\theta d\phi,$$

donde el dominio D de integración debe comprender la parte señalada de la esfera, es decir $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $\phi_o \leq \phi \leq \phi_1$, donde los ángulos ϕ_o y ϕ_1 están determinados por los puntos de corte de las dos superficies. De hecho, usando las ecuaciones de la esfera y el hiperboloide tenemos que, para puntos en ambas superficies,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + z^2 + z^2 = 1 + 2z^2 = 9,$$

luego $z = \pm 2$ y como en coordenadas esféricas $z = 3\cos\phi$,

$$\cos\phi_o = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \cos\phi_1 = -\frac{2}{3}.$$

Así,

$$\mathrm{A}(S) = \int_{\phi_o}^{\phi_1}\int_0^{2\pi} \|\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi\| d\theta d\phi = \int_{\phi_o}^{\phi_1}\int_0^{2\pi} 9\sin\phi \, d\theta d\phi = 18\pi\left[-\cos\phi\right]_{\phi_o}^{\phi_1} = 18\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = 24\pi.$$

iii. Finalmente, para calcular el volumen de la porción del hiperboloide comprendida entre los puntos de corte con la esfera (es decir con tapas planas en los planos $z = \pm 2$), usando la parametrización de tal región sólida en coordenadas cilíndricas tenemos $x^2 + y^2 - z^2 = r^2 - z^2 = 1$, i.e. $r = \sqrt{1+z^2}$, luego

$$\mathrm{V}(H) = \iiint_H dV = \int_0^{2\pi}\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{1+z^2}} r dr dz d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{-2}^{2} \frac{1+z^2}{2} dz d\theta = \pi\left[z + \frac{z^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{28\pi}{3}.$$

2.

i. Cambiando el orden de integración tenemos $\displaystyle\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^{1} e^{x^2}\, dx dy = \int_0^1\int_0^{2x} e^{x^2}\, dy dx = \int_0^1 2xe^{x^2}\, dx = e^{x^2}\,|_0^1 = e-1.$

ii. La integral $\displaystyle\iint_R \left(\frac{x-y}{x+y+2}\right)^2 dxdy$, donde R es el rombo en el plano con vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$, se puede llevar a cabo haciendo el cambio de variables

$$u = x+y \quad \text{y} \quad v = x-y.$$

En términos de estas nuevas coordenadas tenemos $-1 \leq u \leq 1$, $1 \leq v \leq 1$ y $|\det J| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}$, entonces

$$\iint_R \left(\frac{x-y}{x+y+2}\right)^2 dxdy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{v^2}{(u+2)^2} dv\, du = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} (u+2)^{-2} dv\, du = \frac{2}{9}.$$

3.

i. La integral de trayectoria $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} f\, ds$ para $f(x,y,z) = z^2\sqrt{1-xy}$ y la curva $\mathbf{c}$ en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t - \cos t)$, para $t \in [0, 2\pi]$, se calcula por definición:

$$\int_{\mathbf{c}} f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

En este caso $\mathbf{c}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -\cos t + \operatorname{sen} t)$, luego

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + (-\cos t + \operatorname{sen} t)^2} = \sqrt{2 - 2\operatorname{sen} t \cos t},$$

luego

$$\int_{\mathbf{c}} f\, ds = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t - \cos t)^2 \sqrt{1 - \operatorname{sen} t \cos t}\sqrt{2 - 2\operatorname{sen} t \cos t}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\operatorname{sen} t \cos t)(1 - \operatorname{sen} t \cos t) dt$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{sen} t \cos t - 2\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t) dt = 2\sqrt{2}\pi + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(2t) dt = 2\sqrt{2}\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

ii. La integral de linea $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s}$ puede calcularse usando el *teorema fundamental de integrales de línea*, y ya que solo depende del valor de la función f en los extremos de la curva, y ésta es cerrada,

$$\int_{\mathbf{c}} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s} = f(\mathbf{c}(2\pi)) - f(\mathbf{c}(0)) = 0.$$

iii. Sea $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (xz, yz, z^2)$, y sea S la porción de la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ para $z \geq 1$. Entonces $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{F}} = \dfrac{\partial(xz)}{\partial x} + \dfrac{\partial(yz)}{\partial y} + \dfrac{\partial(z^2)}{\partial z} = z + z + 2z = 4z$, luego

$$\iint_{\mathsf{S}} \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{F}}\, dS = 4\iint_{\mathsf{S}} z\, dS = 4\int_0^{\phi_o}\int_0^{2\pi} z(\theta,\phi)\|\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi\| d\theta d\phi = 4\int_0^{\phi_o}\int_0^{2\pi} (2\cos\phi)(4\sin\phi)\, d\theta d\phi,$$

donde ϕ_o está determinado por $z = 2\cos\phi_o = 1$, es decir $\cos\phi_o = \frac{1}{2}$. Así,

$$\iint_{\mathsf{S}} \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{F}}\, dS = 32\int_0^{\phi_o}\int_0^{2\pi} \cos\phi\sin\phi\, d\theta d\phi = 64\pi\left[-\frac{\cos^2\phi}{2}\right]_0^{\phi_o} = 24\pi.$$

iv. Finalmente, observe que si $(x,y,z) \in \mathsf{S}$, entonces el vector normal unitario a S en (x,y,z) en ese punto es

$$\vec{\mathbf{N}}(x,y,z) = \frac{1}{2}\langle x, y, z\rangle,$$

luego

$$\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{N}} = \frac{1}{2}\langle xz, yz, z^2\rangle \cdot \langle x,y,z\rangle = \frac{x^2z + y^2z + z^2z}{2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)z}{2} = 2z,$$

así que

$$\iint_{\mathsf{S}} \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{S} = \iint_{\mathsf{S}} 2z\, dS,$$

pero esto es exactamente la mitad de la integral calculada en la parte iii., es decir

$$\iint_{\mathsf{S}} \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{S} = 12\pi.$$